المجلد 23 العدد 1 مـارس 2022

أثر برنامج مقترح لتدريس البرهان في تطوير مهارة طلبة الجامعة في كتابة البرهان ومعتقداتهم نحوه

د. أمل حسين العجمي
المناهج و طرق التدريس
كلية التربية – جامعة الكويت
Alajmi.a@ku.edu.kw

د. مريم محمد الكندري
قسم الرياضيات
كلية العلوم – جامعة الكويت
Maryam@sci.kuniv.edu.kw

http: //dx.doi.org/10.12785/jeps/230103

أثر برنامج مقترح لتدريس البرهان في تطوير مهارة طلبة الجامعة في كتابة البرهان ومعتقداتهم نحوه

د. أمل حسين العجمي
المناهج و طرق التدريس
كلية التربية – جامعة الكويت

د. مريم محمد الكندري
قسم الرياضيات
كلية العلوم – جامعة الكويت

الملخص

هدفت الدراسة للتعرف على أثر برنامج مقترح لتدريس البرهان في تطوير مهارة طلبة الجامعة في كتابة البرهان في الجبر، بالإضافة إلى تحسين معتقدات الطلبة نحوه، اعتمد البرنامج على أسلوب المناقشة في التدريس، وأيضا تحليل أمثلة لبراهين تحوي في أغلبها أخطاء شائعة في كتابة البرهان، شاركت شعبتان من مقررات الجبر في جامعة الكويت في الدراسة: الأولى تجريبية تكونت من (٢٥) طالباً وطالبةً، والثانية ضابطة تكونت من (٢٨) طالباً وطالبة، وطبق البرنامج المقترح على المجموعة التجريبية بينما تم تدريس المجموعة الضابطة بالطريقة المعتادة، واستخدمت أداتان لجمع البيانات: اختبار كتابة البرهان واستبانة المعتقدات نحو البرهان.

واتضح من خلال نتائج التطبيق البعدي لاختبار البرهان وجود فرق دال إحصائياً بين أداء الطلبة في المجموعتين التجريبية والضابطة لصالح المجموعة التجريبية بحجم أثر مرتفع (n^2)، ويعزى (٤٨٪) من التحسن الذي طرأ على مهارة كتابة البرهان للطلبة في المجموعة التجريبية للبرنامج التدريسي المقترح، وتبين وجود فرق دال إحصائيا بين متوسط استجابة المجموعتين الضابطة والتجريبية في مقياس المعتقدات لصالح المجموعة التجريبية بحجم أثر مرتفع (n^2)، إذ يعزى (٢٢٪) من التحسن الذي طرأ على معتقدات الطلبة نحو البرهان في المجموعة التجريبية للبرنامج التدريسي المقترح.

الكلمات المفتاحية: إجراءات كتابة البرهان، المناقشة، تدريس البرهان، المعتقدات نحو البرهان.

* تاريخ تسلم البحث: ٢٠٢١/١٢/٢٣م
* تاريخ قبوله للنشر: ٢٠٢٢/٣/١م

The Effectiveness of a Suggested Program in Developing College Students' Ability to Write Proofs and their Beliefs Towards it

Dr. Amal H. Alajmi
Mathematics Education
Kuwait University

Dr. Maryam M. Alkandari
Faculty of Science - Dept. of Mathematics
Kuwait University

Abstract

This study investigated the effectiveness of a suggested program in improving students' ability to write proofs in algebra class and develop positive beliefs towards it's proofs. The program was based on discussion held on teaching methods and examples of proofs that involved students' common mistakes. Two algebra classes from Kuwait university participated in the study: the experimental group consisted of (25) students and the control group consisted of (28) students. The program was implemented on the experimental group, while the controlled group was taught in the traditional method used in a college class. Data was collected using a proof writing test and beliefs questionnaire.

The post-test of the proof writing test showed a statistically significant difference in students' performance in favor of the experimental group. The effect size of the program was large (n^2), and it represnted (48%) of the improvement of the students in the experimental group's ability in writing proofs. Additionally, the results indicated a statistically significant difference in students' beliefs towards proofs in the post-test, in favor of the experimental group. The effect size of the program was large (n^2), and it represnted (22%) of the improvement of students' positive attitude towards proofs in the experimental group.

Keywords: Process of writing proof, Discussion, Teaching Proof, Beliefs towards proof.

أثر برنامج مقترح لتدريس البرهان في تطوير مهارة طلبة الجامعة في كتابة البرهان ومعتقداتهم نحوه

د. أمل حسين العجمي
المناهج و طرق التدريس
كلية التربية – جامعة الكويت

د. مريم محمد الكندري
قسم الرياضيات
كلية العلوم – جامعة الكويت

المقدمة

البرهان الرياضي من أساسيات الرياضيات، فالقدرة على الحكم على صحة العبارات وتوضيح أسباب صحتها من المهارات الأساسية في تعلم الرياضيات، والهدف من البرهان في الرياضيات لا يقتصر على التحقق من صحة أي ادعاء في الرياضيات، بل يتعدى ليعطي تبصراً ومهارة في تحليل المعلومات، وأيضا مصدراً لدراسة الرياضيات، واكتشاف العلاقات وتوصيل الأفكار الرياضية وتنظيمها، وتنظيم العبارات والاستدلالات لاستنتاج واكتشاف وتكوين عبارات ومعلومات رياضية، وتطوير مهارات التفكير (Alcock et al., 2015; Hanna & Knipping, 2020; Maslahah & Abadi, 2019) ، وأهمية مهارة البرهان الرياضي لا تقتصر على الرياضيات بل تشملجميع المواقف التي تتطلب إصدار أحكام واتخاذ قرارات، وتنعكس على تنمية مهارات وأسلوب تفكير الفرد في الحياة، فالأفراد ذوو القدرات العالية في البرهان من الممكن أن تتطور لديهم مهارات التفكير التحليلي وملاحظة الأنماط والنظم في المواقف الحياتية (NCTM, 2000).

وعلى الرغم من أهمية البرهان إلا أنه من الموضوعات التي تشكل تحدياً كبيراً للطلبة (Stewart & Thomas, 2019) فقد أوضحت العديد من الدراسات أن غالبية الطلبة يواجهون صعوبة في فهم وقراءة وكتابة البرهان الرياضي (Bickerton & Sangwin, 2021; Selden et al., 2018)، وذلك في المراحل ما قبل الجامعة (Sen & Guler, 2015) ومرحلة الجامعة (Knuth et al., 2010; Maslahah & Abadi, 2019) ، وتشمل هذه الصعوبات جميع جوانب البرهان الرياضي مثل: من أين أبدأ أو كيف أبدأ البرهان الرياضي، وعدم الدقة والمقدرة على استخدام الفرضيات والنظريات، وعدم أو سوء استخدام التعريفات الرياضية والرموز الرياضية، وعدم استخدام طريقة مناسبة للبرهان إذ إن معلومات الطلبة عن طرق البرهان ضحلة، وكذلك إهمال وسوء التعليل لخطوات البرهان (Güler & Dikici,

. (2014; Syamsuri et al., 2018

ويرجع الباحثون ضعف الطلبة في فهم وكتابة البرهان إلى طرق تدريسه فقد أوضح وبر وميجيا-راموس (Weber & Mejia-Ramos, 2014) أن الطرق المعتادة في قاعات التدريس تقوم على المحاضرة، حيث يعرض المحاضر البراهين للطلبة، ويتوقع منهم قراءتها ودراستها ومن ثم فهمها، وفي هذا الوضع يكون الاتصال بشكل أساسي من المحاضر إلى الطالب، أي الاعتماد في مجمله على المحاضر، ويكون الطالب في الموضع السلبي حيث يتلقى ما يتم عرضه، ويجيب عن بعض الأسئلة القصيرة التي تتطلب إجاباتها معلومات محددة ترتكز على الحفظ في غالبيتها، وقد أكد الباحثون أن هذه الطريقة قلّما تفيد الطلبة في فهم الرياضيات (Doruk & Kaplan, 2015)، على العكس من طريقة المناقشة التي تعتمد على إشراك الطلبة وانخراطهم في النقاشات، والتواصل مع المعلم ومع زملائهم لتفسير وتطوير أفكارهم الرياضية، ومناقشة أسئلة مفتوحة تحتاج إلى تفكير وعرض أفكار الطلبة وتفسيراتهم وتبريراتهم لخطوات البرهان، فقد أوضح شونفلد (Schoenfeld, 2014) أن مشاركة الطلبة وتفسيرهم لأفكارهم والأسباب والمبررات لخطوات الحل هي أعلى مستوى لبناء المفهومات الرياضية، ووضعها من ضمن خصائص التدريس الفعال للرياضيات التي قلّما تستخدم في عرض البرهان، سواء في محاضرات المقررات الجامعية (Hemmi, 2008) أو في المدارس (Ugurel & Boz-Yaman, 2017).

واهتم الباحثون أيضا بمعتقدات الطلبة نحو البرهان، إذ إن معتقداتهم نحو المفهومات الرياضية تتشكل عبر مدة من الزمن من خلال الخبرة التي تلقوها والبيئة التعليمية التي حدث فيها هذا التعلم، ومن ثم تشكل هذه المعتقدات سلوكيات الطلبة في التعامل مع المفهومات الرياضية (Schoenfeld, 2016)، ولقد عبر ستايلينو وزملاؤه (Stylianou et al., 2015, p. 94) عن المعتقدات بأنها "تلخص وتشكل خبرة الطلبة"، ولقد رصدت الدراسات بعض المعتقدات السلبية لدى الطلبة نحو البرهان منها: أن البرهان الرياضي يكون صحيحاً فقط لأنه عرض من قبل المعلم، فهم هنا يتبعون الشخص الموثوق فكل ما يورده يكون صحيحاً، وهناك أيضا مجموعة من الطلبة تعتقد أن انطباق عبارة رياضية على مجموعة من الأمثلة يجعلها صحيحة دائماً، وآخرون يرون عدم أهمية البرهان الرياضي مما يؤدي إلى إهمال دراسته (Doruk & Kaplan, 2015; Kögce & Yıldız, 2011).

ونظراً لأهمية البرهان الرياضي والصعوبات التي يواجهها الطلبة في بناء البراهين، فقد نشطت الدراسات في وضع نماذج لفهم البرهان الرياضي، وهذه النماذج يمكن أن توظف في

تدريس وقراءة ومناقشة وتصحيح البرهان الرياضي، فقد قام الباحثان يانج ولن (Yang & Lin, 2008) بوضع نموذج من أربعة إجراءات وهي: الأول معنى المصطلحات، والثاني: تحديد عناصر البرهان، والثالث: إدراك الترابط بين عناصر البرهان، والرابع :تلخيص البرهان، وأضاف الباحثون ميجيا-راموس وزملاؤه (Mejia-Ramos et al., 2012) أربع نقاط إلى الإجراء الرابع الذي أشار إليه يانج ولن (Yang & Lin, 2008) وهي: تلخيص المعنى العام للبرهان، وتحديد نوع البرهان، وتوظيف البرهان لحل مشكلات أو مهمات أخرى، والتوضيح باستخدام أمثلة خاصة، وحدد الباحثان شتين وديكيسي (Çetin & Dikici, 2021) إجراءات البرهان في مقررات الجبر وذلك بناء على الصعوبات التي تواجه الطلبة في البرهان وتتكون من أربعة إجراءات: تحديد الفرضية وتقابل فهم المنطق للبرهان، استخدام الفرضية وتتعلق بكيفية بدء البرهان، والإجراء الثالث يشمل تحديد طريقة البرهان ومعرفة التعريفات والمصطلحات والرموز الرياضية، والأخير هو الوصول للبرهان بلغة رياضية ومنطق سليم.

ولقد نشطت الدراسات التي تناولت البرهان الرياضي وتعددت جوانبها وتناولت: الصعوبات التي تواجه الطلبة في كتابة وقراءة البرهان، وأساليب تدريس البرهان، ومعتقدات الطلبة نحو البرهان.

ولقد ركزت العديد من الدراسات على الصعوبات التي تواجه الطلبة عند كتابة وقراءة البرهان، فلقد أجرى دورك وكابلان (Doruk & Kaplan, 2015) دراسة على الطلبة المعلمين في السنة الثانية، هدفت إلى التعرف على الصعوبات التي يواجها الطلبة المعلمون في البرهان وأسباب هذه الصعوبات، وتبين من خلال النتائج أن من أهم الصعوبات: فهم النظرية أو العبارة المراد إثباتها، وفهم واستخدام التعريفات الرياضية، استخدام لغة رياضية ومنطق سليم، معرفة واختيار الطريقة المناسبة للبرهان، وتبين أن من أهم أسباب هذه الصعوبات الاعتقادات السلبية لدى الطلبة نحو البرهان، مثل اعتقاد الطلبة أن البرهان الرياضي غير مهم، وسبب آخر هو كيفية دراستهم للبرهان لأنها تعتمد على الحفظ بدلاً من فهم البرهان، وأنهم يخصصون وقتاً قليلاً للبرهان الرياضي، وكذلك طرق التدريس التي تتبعها الجامعة في تدريس البرهان، فهي تعتمد على أسلوب العرض التقليدي وقد أكد الطلبة أن هذا الأسلوب في تدريس البرهان لا يساعدهم على الفهم.

وأجرى أبو عقيل (٢٠١٥) دراسة هدفت إلى التعرف على معوقات تدريس البرهان الرياضي من وجهة نظر معلمي الرياضيات من الصف السابع إلى العاشر في محافظة الخليل، وتبين أن أهم المعوقات: هي عدم قدرة الطلبة على البدء في البرهان، وعدم قدرتهم على

تسبيب خطوات البرهان واستخدام لغة الرياضيات وعدم امتلاك الطلبة للمفهومات الرياضية المساندة للبرهان، وكذلك أن الطلبة لا يهتمون بالبرهان.

وأجرى سيامسوري وزملاؤه (Syamsuri et al., 2018) دراسة للتعرف على أهم الصعوبات التي تواجه الطلبة في تخصص الرياضيات في البرهان في إحدى جامعات إندونيسيا، ومن خلال المهمات التي أجاب عنها الطلبة و المقابلات صنف الباحثون الصعوبات إلى محورين: بناء البرهان وفهم البرهان، وكانت أهم الصعوبات في بناء البرهان هي: ١) تركيب البرهان والتي تركز على التعريفات الرياضية وسوء أو عدم استخدامها، ٢) عدم التمكن من استخدام لطرق البرهان أو عرض أمثلة للتأكيد على صحة العبارات الرياضية، ٣) كتابة افتراضات غير سليمة، ٤) عدم التسلسل في كتابة العبارات في البرهان، وكانت أهم الصعوبات في المحور الثاني وهو فهم البرهان: ١) كتابة نتائج أو افتراضات غير صحيحة، ٢) أفكار أساسية مفقودة أو غير صحيحة، ولقد اقترح الباحثان طرقاً متعددة لتدريس البرهان لهؤلاء الطلبة مثل مناقشة الأمثلة المحلولة.

وقام واليو وفيداكوفتش (Waluyo & Vidákovich, 2021) بدراسة على طلبة الجامعة في إندونيسيا في برنامج لإعداد معلمي الرياضيات، هدفت الدراسة إلى التعرف على مستوى أداء الطلبة المعلمين في البرهان الرياضي في السنوات الدراسية لبرنامج إعداد المعلمين، واستخدم الباحثان اختباراً تم بناؤه تبعاً لنموذج ميجيا-راموس وزملاؤه (Mejia-Ramos et al., 2012) لتقويم البرهان، وتبين من خلال النتائج أنه لا يوجد اختلاف دال إحصائياً بين الطلبة المعلمين يعزى للنوع، ولكن الاختلاف كان في الأداء عبر السنوات الدراسية الثلاث لصالح المستوى الثالث.

وتناولت الدراسات أيضا الجانب التدريسي للبرهان، فأجرى كاسمان (Kasman, 2006) دراسة على طلبة أحد مقررات الجبر في الجامعة، هدفت الدراسة إلى وصف الواجبات المقدمة للطلبة لتحسين مهارتهم في كتابة البرهان، واعتمدت الواجبات على أمثلة لبراهين تحوي أخطاء، كان المطلوب من الطلبة تحليل هذه البراهين وتحديد أخطائها، وكتابة كيف يمكن تصحيح البرهان، ولقد أوضحت الدراسة أن هذه الواجبات شجعت الطلبة على توضيح وتفسير تبريراتهم حول مدى صحة هذه البراهين، وشجعت الطلبة على التواصل والمناقشة في الرياضيات، ولقد كانت آراء الطلبة حول هذه الواجبات مشجعة، فقد ذكروا أنها كانت ممتعة وأنهم استفادوا من تحليل الأخطاء الواردة في الأمثلة.

وأجرى فوكاوا-كونللي (Fukawa-Connelly, 2012) دراسة للتعرف على أسلوب تدريس

البرهان الرياضي في المرحلة الجامعية، وذلك عن طريق ملاحظة وتحليل محاضرات لأحد الأساتذة في مقرر الجبر، ولقد تبين أن الطريقة المتبعة في تدريس البرهان تعتمد على نموذج البناء التدريجي الهرمي للبرهان، إذ يحدد المحاضر المطلوب في البرهان وكيفية استخدام النتائج والشروط للإثبات، والمصطلحات الأساسية ويشمل هذا النموذج المعلومات الجبرية التي يحتاجها الفرد للتعامل مع الرموز والمعلومات الجبرية، ولقد تبين أن أسلوب الأسئلة المتبعة في تدريس البرهان تحد من مشاركة وفاعلية الطلبة في المحاضرة، فقد كانت الأسئلة المطروحة من قبل المحاضر تركز في أغلبها على الأسئلة القصيرة المحددة، وتوجه الطلبة نحو الإجابات، وذلك يحد من فرص الطلبة في التفكير وتبرير العبارات المستخدمة في البرهان.

وأجرى زر وزر (Zerr & Zerr, 2011) دراسة هدفت إلى تقديم طريقة لتدريس البرهان الرياضي تعتمد على الاستفادة من أخطاء الطلبة، وقد أوضح الباحثان أهمية قراءة برهان غير صحيح وتحليل ونقد الأخطاء الواردة في البرهان، وأطلق اسم مراجعة القرناء "Peer Review" على طريقة التدريس، ولقد صاحب مراجعة البراهين مجموعة من الأسئلة لمساعدة الطلبة على تحدي الأخطاء الواردة في البرهان مثل: كيف تم البدء بالبرهان؟ هل استخدم المعطى، هل البرهان سليم؟ إذا كانت الإجابة لا، فأين كانت بداية الخطأ؟ وكيف يمكن تصحيحيها؟ ولقد طبقت الدراسة في أحد مقررات تدريس البرهان الرياضي، وقد أكمل الطلبة مراجعة البراهين الرياضية، وحصلوا على الأقل (٨٠٪) من الدرجات في مراجعة البرهان وتحدي الأخطاء الواردة فيه.

وأجرى ستافرو (Stavrou, 2014) دراسة على الطلبة المعلمين المقيدين في مقررات نظرية الأعداد والجبر المجرد، وتمت الدراسة في خطوتين: الأولى للتعرف على أخطاء الطلبة في البرهان، وتبين من خلال تحليل واجبات الطلبة في هذه المقررات أن الأخطاء الشائعة لديهم هي: يفرض الاستنتاج، يثبت معلومة عامة باستخدام مثال خاص، لا يثبت الشروط، واستخدام خاطئ للتعريفات الرياضية، وفي الخطوة الثانية من الدراسة تم تعريف الطلبة بأخطائهم بالبرهان الرياضي، ولكن لم يتم شرح كيفية تجنب هذه الأخطاء، وذلك للتعرف على تأثير معرفتهم بهذه الأخطاء في تحسين مهاراتهم في البرهان، وتبين من خلال الواجبات ثلاث سلوكيات رئيسة:١) مجموعة كبيرة سلمت أوراق الواجبات من دون أي إجابات، ٢) مجموعة كتبت عبارات مثل"أنا غير متأكد من كيفية بدء البرهان"، ٣) مجموعة من الطلبة كتب أمثلة غير ضرورية للتأكيد على البرهان السليم الذي تمت كتابته.

وأجرى يوجرال وبوز-يامن (Ugurel & Boz-Yaman, 2017) دراسة هدفت إلى التعرف على نوعية المناقشات في حصص البرهان الرياضي في المرحلة الثانوية، ولقد تمت

ملاحظة ثلاثة عشر معلماً ومعلمة في المرحلة الثانوية، ورصد المناقشات التي تتم خلال حصص البرهان، وتبين من خلال النتائج أن في تدريس البرهان يكون التدريس متركزًا على المعلم فهو من يعرض المادة ويستخدم بعض الأسئلة الموجهة للطلبة، وقلما يوضح أو يفسر المعلمون المعاني للمفهومات والمصطلحات المستخدمة، وكذلك فقد كانت التبريرات والتفسيرات محدودة في هذه الحصص، ولم توجد مجموعة صغيرة للمناقشة أو حل الواجبات.

وأجرى خاجة (٢٠١٩) دراسة هدفت إلى التعرف على تأثير تدريس البرهان باستخدام التعليم النشط لدروس تشابه المثلثات لدى الطلبة في الصف التاسع، اعتمد الباحث خلال الدراسة المنهج شبه التجريبي، وأجريت الدراسة على عينة من (٦٥) طالباً، وتبين من خلال النتائج وجود فرق دال إحصائيا لصالح المجموعة التجريبية في مهارات البرهان الرياضي.

وكذلك أجرى كشك ورمضان وزهدي (٢٠٢٠) دراسة على أثر استخدام التعليم النشط في تنمية مهارات البرهان الرياضي لدى طالبات الصف الثاني الإعدادي، وتكونت عينة الدراسة من ((١٢٨ طالبة، واستخدم الباحثون المنهج شبه التجريبي في الدراسة، وركز برنامج الدراسة على خمسة دروس من وحدة متوسطات المثلث وأربعة دروس من وحدة التباين، وتبين من خلال النتائج وجود فرق دال إحصائيا لصالح المجموعة التجريبية في مهارات البرهان الرياضي.

وأجرى حجازي (٢٠٢٠) دراسة على تأثير الأنشطة الإثرائية في الأنماط الرياضية على مهارات البرهان الرياضي لدى طلاب الصف الثاني الإعدادي، وبلغ حجم العينة (٣٠) طالباً وطالبةً، واستخدم الباحث المنهج شبه التجريبي ذا المجموعة الواحدة، وتبين من خلال نتائج الدراسة نمو مهارات البرهان الرياضي لدى أفراد العينة نتيجة لتطبيق الأنشطة الإثرائية .

واهتمت العديد من الدراسات بمعتقدات الطلبة نحو البرهان، فلقد أجرى كوجك ويلدز (Kögce & Yıldız, 2011) دراسة للتعرف على مفهوم البرهان وأهميته لدى الطلبة المعلمين في السنة الأولى والنهائية، تم خلال الدراسة تطبيق استبانة على عينة تكونت من (١٧٠) طالباً وطالبةً، وتبين من خلال النتائج أن مفهوم البرهان كان مقتصراً على تحديد صحة النظريات لدى الطلبة في السنة الأولى، أما الطلبة في السنة النهائية فقد كان مفهوم البرهان لديهم أوسع، فلقد اشتمل على تبيان صحة أو خطأ العبارات، والإجابة عن السؤال لماذا هذه العبارة صحيحة أو غير صحيحة، وأيضا توضيح وتفسير للعبارات، وتطبيق للشروط، أما عن أهمية البرهان فقد كان اعتقاد الطلبة في السنة النهائية أن البرهان مهم وضروري بينما مجموعة من طلبة السنة الأولى لا يرون أهمية للبرهان.

وأجرى ستايلينو وزملاؤه (Stylianou et al., 2015) دراسة حول معتقدات الطلبة نحو البرهان وخبرتهم السابقة مع دراسة البرهان، أجريت الدراسة على (٥٣٥) من الطلبة في السنة الأولى والثانية في المرحلة الجامعية في ست جامعات، استخدمت في الدراسة أدوات متعددة: اختبار مقالي واختبار اختيار من متعدد واستبانة ومقابلات، وتبين من خلال النتائج أن الطلبة يعانون من صعوبات في كتابة البرهان، ولكن مجموعة كبيرة منهم يقدرون دور ودقة البرهان الرياضي ويرى معظم الطلبة أن دورهم هامشي في الدروس التي تتضمن البرهان الرياضي، فقد ذكر أقل من خُمس الطلبة المشاركين أنه كان لهم دور في الدروس التي احتوت على البرهان، وأوضحت النتائج أن أكثر من نصف الطلبة ذوي الأداء المرتفع في البرهان هم الذين يحملون معتقدات إيجابية نحو البرهان الرياضي ويرون أن لهم دورًا مهمًا في دراسة البرهان الرياضي.

وأجرى فيهولانن وزملاؤه (Viholainen et al., 2019) دراسة على طلبة الجامعة من فنلندا والسويد هدفت إلى التعرف على معتقداتهم نحو البرهان، استخدم الباحثون استبانة لمعتقدات صممت وفق نموذج ليكرت الخماسي، تبين من خلال النتائج أن (٨٢٪) من الطلبة يقدرون ويتحمسون لدراسة البرهان الرياضي، ولكنهم يعتقدون أن قدرتهم على كتابة البرهان منخفضة، وذكر الطلبة عدداً من الأسباب لانخفاض قدرتهم في البرهان الرياضي، منها أنهم يعانون من صعوبة في كيفية بدء البرهان أو في تنظيم خطواته، وصعوبات في فهم طبيعة البرهان وأيضا في فهم مفهومات الرياضيات المتعلقة بالبرهان من تعريفات ونظريات، وأيضا الخوف من ارتكاب الأخطاء عند كتابة البرهان.

ومن خلال استعراض الدراسات السابقة للبرهان الرياضي تبيَّن أن الطلبة يعانون من صعوبات في كتابة البرهان الرياضي، وأن الدراسات في الوطن العربي التي تناولت إعداد برامج لتدريس البرهان الرياضي قليلة بشكل عام، ولقد ركزت على البرهان في مجال الهندسة (خاجة، ٢٠١٩، كشك ورمضان وزهدي، ٢٠٢٠)، ولم توجد (في حدود علم الباحثتين) دراسات تناولت تدريس البرهان في المرحلة الجامعية والبرهان في مجال الجبر، وكذلك لم تستخدم الدراسات السابقة في الوطن العربي أسلوب المناقشة لتدريس البرهان، لذلك أتت هذه الدراسة لبناء برنامج لتدريس البرهان قائم على المناقشة وتحليل أخطاء الطلبة في المرحلة الجامعية واختبار أثر هذا البرنامج في تطوير مهارة طلبة الجامعة في كتابة البرهان ومعتقداتهم نحوه.

مشكلة الدراسة

تؤكد الأدبيات والدراسات في مجال الرياضيات على التحدي الذي يواجه الطلبة في كتابة وقراءة وفهم البرهان الرياضي (Maslahah & Abadi, 2019; Stewart & Thomas, 2019)، ويسهم هذا التحدي في تكوين معتقدات سلبية نحو البرهان الرياضي (Doruk & Kaplan, 2015)، وتتجلى صعوبة التعامل مع البرهان الرياضي في المرحلة الجامعية حيث يشكل البرهان الرياضي مساحة كبيرة من المقررات التي تدرس في قسم الرياضيات، ويرجع الباحثون انخفاض مستوى الطلبة في البرهان الرياضي إلى طريقة التدريس التي تعتمد على المحاضرة، فقد أوضح فوكاوا-كونللي (Fukawa-Connelly, 2012) أن المحاضرين يفترضون أن الطلبة سوف يتعلمون البرهان من خلال قراءة ودراسة البرهان الذي تم عرضه في المحاضرة، ولكن الأبحاث تدلل على أن الطلبة يتعلمون القليل من هذه الطريقة (Weber & Mejia-Ramos, 2014)، وأوضحت الدراسات أن الطلبة يرون أن طرق التدريس التي تتبعها الجامعة في تدريس البرهان والتي تعتمد على أسلوب العرض التقليدي لا تساعدهم على الفهم (Doruk & Kaplan, 2015)، ولقد قدم الباحثون طرقاً بديلة للمحاضرة عند تدريس البرهان من أبرزها المناقشة، إذ أكدوا أن المناقشة توفر مساحة للطلبة للتفسير والتبرير وتوضيح آرائهم والتواصل مع المحاضر ووالتواصل فيما بينهم (Syamsuri et al., 2018)، لذلك أتت هذه الدراسة لبناء برنامج لتدريس البرهان الرياضي يوظف المناقشة كأسلوب للتدريس و تحليل الأخطاء الشائعة لدى الطلبة في تدريس البرهان واختبار أثر هذا البرنامج في تحسين مستوى الطلبة في كتابة البرهان الرياضي ومعتقداتهم نحوه وذلك من خلال الإجابة عن أسئلة الدراسة.

أسئلة الدراسة

- ما أثر برنامج مقترح لتدريس البرهان قائم على المناقشة وتحليل أمثلة لبراهين في تطوير مهارة طلبة الجامعة في كتابة البرهان؟
- ما أثر برنامج مقترح لتدريس البرهان قائم على المناقشة وتحليل أمثلة لبراهين في تنمية معتقدات طلبة الجامعة نحو البرهان؟

فرضيات الدراسة

- لا يوجد فرق دال إحصائيا عند مستوى (a = ٠,٠٥) بين متوسطي درجات الطلبة في اختبار كتابة البرهان في المجموعتين التجريبية والضابطة في التطبيق البعدي يعزى للبرنامج المقترح لتدريس البرهان.
- لا يوجد فرق دال إحصائيا عند مستوى (a = ٠,٠٥) بين متوسطي درجات الطلبة في المجموعتين التجريبية والضابطة في التطبيق البعدي لاستبانة معتقدات الطلبة نحو البرهان الرياضي يعزى للبرنامج المقترح لتدريس البرهان.

أهداف الدراسة

البرهان الرياضي من أساسيات الرياضيات ، ولذلك هدفت الدراسة إلى:

- إعداد برنامج لتدريس البرهان الرياضي يعتمد المناقشة وتحليل أمثلة للبراهين.
- تطوير مهارة كتابة البرهان الرياضي لدى طلبة الجامعة.
- تنمية معتقدات إيجابية نحو البرهان الرياضي ودوره في الرياضيات.
- التحقق من فاعلية برنامج تدريس البرهان المقترح في تطوير مهارة كتابة البرهان لدى طلبة الجامعة.
- التحقق من فاعلية برنامج تدريس البرهان المقترح في تنمية معتقدات طلبة الجامعة نحو البرهان الرياضي.

أهمية الدراسة

الأهمية التطبيقية : يستمدُّ البحث أهميته من أهمية مفهوم البرهان في الرياضيات، فوضع برنامجاً لتطوير مهارة كتابة البرهان الرياضي لدى الطلبة في المرحلة الجامعية من شأنه الارتقاء بمستوى الطلبة في كتابة البرهان، وكذلك توجيه نظر المهتمين بالدراسة على المستوى الجامعي بأهمية توظيف المناقشة والتركيز على الأخطاء الشائعة لدى الطلبة عند تدريس البرهان.

الأهمية النظرية: إثراء البحث في مجال البرهان تدريس البرهان في الجبر وكذلك على المستوى الجامعي، وقد تبيَّن من خلال استعراض الدراسات السابقة في الكويت وفي الوطن العربي بشكل عام أنها تركز على البرهان في الجانب الهندسي. كما أنها تركز على المرحلتين: المتوسطة والثانوية (في حدود علم الباحثتين)، لذلك فإن البحث من الممكن أن يستثير البحث

العلمي في موضوع البرهان الرياضي في مجال الجبر، ويدفع إلى إجراء دراسات متعددة فيها تنويع طرق تدريس البرهان.

حدود الدراسة

تتحدّد نتائج الدراسة بما يأتي:

حدود موضوعية :

أ) تقتصر الدراسة على ثلاث طرق للبرهان وهي: البرهان المباشر والبرهان غير المباشر والبرهان بنقض الفرض

ب) تقتصر الدراسة على البرهان الجبري: أي البراهين المتعلقة بالمفاهيم الجبرية مثل نظريات الأعداد و استخدام مفهومات محددة منها الأعداد الزوجية الطبيعية والأعداد الفردية وقابلية القسمة في الأعداد الطبيعية وخواص الأعداد الأولية، والنظرية الأساسية في الأعداد.

حدود بشرية : تقتصر الدراسة على الطلبة المسجلين في مقررات الجبر للسنة الثانية لقسم الرياضيات في كلية العلوم بجامعة الكويت.

مصطلحات الدراسة

كتابة البرهان الرياضي: هي كتابة سلسة من العبارات المنطقية المتتابعة والمترابطة التي يكتبها الفرد بدقة عالية للوصول إلى إثبات صحة قضية ما، تبدأ بفرض، ويستخدم خلالها المعطيات والبديهيات والتعريفات والنظريات للوصول إلى النتيجة.

المعتقدات نحو البرهان الرياضي: هي مشاعر وفهم الفرد التي تحدد الطريقة التي يصور ويتعامل بها مع البرهان الرياضي، وتشكل خلاصة خبرة الفرد والبيئة المحيطة به نحو مفهوم البرهان، وهي العدسة التي تؤثر على وجهة نظره نحو البرهان الرياضي.

استراتيجية المناقشة : هي كل الطرق التي يتخذها المعلم للتواصل مع الطلبة خلال الدرس، وتتضمن الكلام والكتابة والرموز والعروض والنقاشات في التفسيرات وتعليل الأسباب ليتمكن الطلبة من الانخراط في البيئة التعليمية لتطوير فهمهم للمفهومات الرياضية .

منهج الدراسة

اتبعت الباحثتان المنهج شبه التجريبي، واستخدمتا التصميم قبلي – بعدي لمجموعتين إحداهما تجريبية والأخرى ضابطة، وذلك لمناسبة هذا المنهج لأهداف الدراسة المتمثلة في

التعرف على تأثير البرنامج القائم على المناقشة وتحليل أمثلة لبراهين يحتوي أغلبها على أخطاء شائعة لدى الطلبة عند كتابة البرهان لتطوير مهارة البرهان الرياضي لدى الطلبة، وتنمية معتقدات إيجابية نحو البرهان الرياضي.

مجتمع الدراسة وعينتها

تكوّن مجتمع الدراسة من طلبة جامعة الكويت المسجلين في مقررات الجبر، ولقد تمّ اختيار شعبتين دراسيتين للمشاركة في الدراسة بطريقة العينة الميسرة، ثم تم بالتعيين العشوائي البسيط اختيار إحدى الشعبتين كمجموعة تجريبية واحتوت على (٢٥) طالباً وطالبةً، والأخرى كمجموعة ضابطة واحتوت على (٢٨) طالباً وطالبةً، أي أن المجموع الكلي لأفراد الدراسة (٥٣) طالباً وطالبةً، وقام بتدريس المجموعتين أحد أعضاء هيئة التدريس في قسم الرياضيات، وتم تدريس المادة العلمية نفسها في كلا المجوعتين ولكن اختلفت طريقة التدريس، فلقد تم تطبيق البرنامج التدريسي المقترح لتدريس البرهان على المجموعة التجريبية، بينما تم تدريس البرهان للمجموعة الضابطة بالطريقة المعتادة وهي المحاضرة.

البرنامج التدريسي المقترح

هدف البرنامج: يهدف البرنامج إلي تعليم طلبة المرحلة الجامعية كتابة برهان رياضي متكامل العناصر في مجال الجبر بثلاث طرق وهي: البرهان المباشر والبرهان غير المباشر والبرهان بنقض الفرض، وكذلك يهدف البرنامج إلى تنمية معتقدات إيجابية نحو البرهان الرياضي ودوره في الرياضيات.

النموذج المتبع في تدريس البرهان: بعد قراءة الأدبيات والتعرف على المعايير الرياضية الأساسية في كتابة وتدريس البرهان الرياضي، وخبرة الباحثتين في تدريس البرهان ومناقشة أربعة من ذوي الاختصاص في قسم الرياضيات تم الاتفاق على نموذج لتدريس البرهان يتكون من أربعة إجراءات:

أولاً: تحديد المعطيات Assumption والنتائج Conclusion، والتأكيد على الفرق بينهما وكيفية استنباطهما من النظريات المعطاة.

ثانياً : تحديد التعريفات اللازمة لكتابة البرهان.

ثالثاً: تحديد طريقة البرهان، فقد تم التأكيد على الفرق بين طرق البرهان الثلاثة المستخدمة في الدراسة، ومتى يمكن استخدامها، وكيفية بدء وخطوات تسلسل كتابة البرهان لكل طريقة من هذه الطرق.

رابعاً: ترابط العبارات وتبريراتها، فتستخدم طرق التحليل والاستنتاج الرياضية لربط خطوات البرهان معاً وتعليلها.

تم التأكيد على كيفية ترابط العبارات وتبريراتها فنبدأ بالفرضيات ثم استخدام الطريقة الأنسب للبرهان، ثم تسلسل العبارات والربط والانتقال من عبارة رياضية إلى العبارة الرياضية التالية في البرهان، فتكون العبارة الأولى هي السبب المؤدي للعبارة التالية وهي النتيجة ويتم استنباط هذه العلاقة من خلال الاستفادة من البديهيات والنظريات السابقة الأساسية الخاصة بموضوع البرهان التعريفات المستخدمة وخواصها.

الأنشطة المستخدمة: وتنقسم الأنشطة إلى قسمين الأول في المحاضرات، والثاني خارج المحاضرات

أولاً: الأنشطة في المحاضرات. وتتركز في ثلاثة أنواع :

أ) كتابة برهان لنظريات في الجبر.

ب) تحليل أمثلة لبراهين محلولة يحتوي أغلبها على أخطاء شائعة لدى الطلبة في كتابة البرهان، ويقوم الطلبة بتحديد مدى صحة هذه البراهين المعروضة وتحديد الأخطاء الواردة فيها وإعادة كتابتها بشكل صحيح، شكل (١) يوضح أحد الأمثلة التي استخدمت في الدراسة.

ج) مناقشة أسئلة حول معنى البرهان، ودوره في الرياضيات.

. Suppose m is an integer.	فرض النتيجة والبدء بها للوصول لبرهان المطلوب
Claim. If m^2 is odd, then m is odd.	
Proof. Assume m is odd. } ←	
Then $m = 2k + 1$ for some integer k.	
Therefore, $m^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$	
$= 2(2k^2 + 2k) + 1$, which is odd.	
Therefore, if m^2 is odd, then m is odd.	

شكل (١)

مثال لبرهان محلول عرض من خلال البرنامج

ثانياً: أنشطة خارج المحاضرات. ركزت الأنشطة خارج المحاضرات على الواجبات المنزلية المتنوعة من حيث الأسئلة: كتابة برهان، تحليل مدى صحة أمثلة لبراهين مكتوبة، إذ يقوم الطلبة بتحليلها للتعرف على ما إذا كانت سليمة أم أنها تشتمل على أخطاء، ومن ثم كتابتها بشكل سليم، وكذلك أسئلة لبحث أهمية البرهان في الرياضيات، ولقد تنوعت طرق أداء هذه الواجبات من بين فردية بواقع مرتين في الأسبوع، وفي مجموعات بواقع مرة أسبوعياً، وكذلك

تنوعت طرق تصحيح ومناقشة هذه الواجبات فمنها ما يصححه الأستاذ ويعطي ملاحظات للطلبة فردياً أو جماعياً في بداية المحاضرات، ومنها ما يتم مناقشته بشكل جماعي في المحاضرات، ومنها ما يتم تصحيحه من قبل الأقران ومنها ما يتم مناقشته وتصحيحه من خلال مجموعات الطلبة الصغيرة من خلال التطبيقات الإلكترونية (واتس آب).

استراتيجية التدريس. ركز البرنامج بشكل أساسي على استراتيجية المناقشة، فقد تمت إثارة أسئلة للمناقشة حول البرهان وكيفية كتابته، ولقد تمحورت الأسئلة حول الإجراءات الأربعة المعتمدة في الدراسة، وشجعت المحاضرة الطلبة على التفسير والتبرير وعرض الأسباب للخطوات وتمت هذه المناقشات من خلال: كتابة برهان لنظرية وتحليل أمثلة لبراهين محلولة لتحدد مدى صحتها وتحديد الأخطاء الواردة فيها وإعادة كتابتها بشكل صحيح.

جدول (١) يوضح الإجراءات الأربعة وأمثلة لنوعية الأسئلة التي يتم مناقشتها لكتابة برهان وتحليل برهان مكتوب، ولم تقتصر هذه الأسئلة والمناقشة على المحاضرات بل تم تشجيع الطلبة على التفكير في هذه الأسئلة من خلال كتابتهم للواجبات المنزلية.

جدول (١)
أسئلة المناقشة المصاحبة لكتابة برهان وتحليل لمثال برهان معطى

نموذج تدريس البرهان	كتابة البرهان لنظرية	تحليل مثال لبرهان مكتوب
تحديد المعطيات و المطلوب	ما المطلوب برهانه؟ ما هو المعطى؟ كيف يمكن استخدام المعطى؟ وضح	كيف تمت بداية البرهان؟ هل استخدم المعطى، هل تم الوصول إلى البرهان المطلوب؟ وضح
تحديد التعريفات اللازمة لكتابة البرهان	ما هي التعريفات الواردة في المعطيات والمطلوب؟ ما هي التعاريف التي يمكن أن تساعد في البرهان؟ وكيف يمكن الاستفادة منها؟	هل التعريفات المستخدمة مناسبة للبرهان؟ هل التعريفات سليمة؟ إذا كانت الإجابة خطأ كيف أثرت على سلامة البرهان؟ وكيف يمكن تصحيحها؟
طريقة البرهان	كيف يمكن تحديد طريقة البرهان؟ أي الطرق أنسب للبرهان؟ ولماذا؟ وكيف يكون تسلسل هذه الطريقة؟	ما هي الطريقة المستخدمة في البرهان؟ وهل هي مناسبة؟ هل تم استخدام الطريقة بشكل سليم؟
ترابط العبارات وتبريراتها	كيف نبدأ بكتابة البرهان وفق الطريقة المختارة؟ ما هي الخطوة التالية؟ ولماذا؟ كيف يمكن الوصول للمطلوب برهانه؟ وضح	هل البرهان سليم؟ إذا كانت الإجابة لا، فأين وقعت بداية الخطأ؟ وكيف يمكن تصحيحه؟ هل التبريرات سليمة؟ وضح هل نهاية البرهان مناسبة لنوع البرهان؟ لماذا؟ إذا كان البرهان كله صحيحاً، هل لديك أي مقترحات لتحسين الصياغة أو المفردات المستخدمة

ولقد كانت هذه المناقشات تتم بصور متعددة: جماعية خلال المحاضرة، وثنائية أيضا من خلال مناقشات ثنائية في المحاضرة، وفي مجموعات صغيرة من خلال المجموعات المحددة

للطلبة في تطبيق واتس آب لمناقشة الواجبات، وكذلك المناقشات الأسبوعية من خلال برنامج الواتس آب حيث يتم التواصل مع المحاضر وجميع طلبة الشعبة الدراسية، فيتم طرح موضوع للمناقشة أسبوعيا على المجموعة ويطلب من الكل المشاركة برأيه أو حله ويقوم المحاضر بمراجعة حلول الطلبة وتقييم تطور معتقداتهم وقدراتهم في كتابة البرهان، ثم تتم مناقشتهم بها لاحقاً في المحاضرة التالية.

التسلسل الزمني للبرنامج. تم تطبيق البرنامج في عشرة أسابيع بواقع تدريسي ثلاث ساعات أسبوعياً، ففي بداية كل محاضرة ساعة تدريسية، يتم تخصيص عشر دقائق لمناقشة الواجبات ثم يتم عرض الدرس من خلال الأنشطة وهي: كتابة برهان، وتحليل مثال لبرهان معطى، ومناقشة أسئلة حول معنى وأهمية البرهان، ولقد تم خلال الأسبوعين الأول والثاني التركيز على البرهان المباشر، ثم في الأسبوع الثالث بدأ البرهان غير المباشر، وفي الأسبوع الرابع تمت مناقشة البرهان المباشر وغير مباشر، وفي الأسبوع الخامس بدأ البرهان بنقض الفرض، وفي الأسابيع التالية تم التركيز على التنوع بين طرق البرهان الثلاث لاستنباط الفرق بينهم، وكيفية استخدام الطريقة الأنسب لبرهان نظرية معطاة.

أدوات الدراسة

استخدمت الباحثتان أداتين لجمع البيانات للإجابة عن أسئلة الدراسة وهما: اختبار كتابة البرهان الرياضي واستبانة المعتقدات نحو البرهان الرياضي.

أولاً: اختبار كتابة البرهان الرياضي

إعداد الاختبار في صورته الأولية: هدف الاختبار إلى قياس مهارة الطلبة في كتابة البرهان الخاص بالمفهومات الجبرية، وركز الاختبار على ثلاث طرق للبرهان: المباشر وغير المباشر وبنقض الفرض، وذلك لجمع البيانات اللازمة للإجابة عن السؤال الأول، ولقد تكوّن الاختبار في صورته الأولية من ستة أسئلة، يطلب فيها من الطالب كتابة برهان لمفهومات جبرية، بحيث يستخدم الطالب الطرق الثلاث من البرهان موضع الدراسة بواقع سؤالين لكل طريقة من طرق البرهان.

التحقق من صدق الاختبار: بعد تصميم الاختبار من قبل الباحثتين، تمّ عرضه في صورته الأولية على أربعة من المحكّمين المختصين في الرياضيات، وطُلِبَ منهم إبداء آرائهم حول مناسبة بنود الاختبار للأهداف التي وضع من أجلها، وتمثيلها لطرق البرهان الثلاث: المباشر وغير المباشر ونقض الفرض، ومدى مناسبة بنود الاختبار لأفراد عينة البحث، وارتباطها بالجبر، ولقد اقتصرت التعديلات المقترحة من قبل المحكمين على توضيح لبعض الصياغات،

ولقد تمّ الأخذ بتوجيهات المحكّمين، فاشتمل الاختبار في صورته النهائية على ستة أسئلة بواقع سؤالين لكل طريقة من طرق البرهان الثلاث موضوع الدراسة.

تصحيح اختبار كتابة البرهان الرياضي : تم تحديد أربع درجات لكل بند من البنود الستة في الاختبار، بحث يتم توزيعها على الإجراءات الأربعة المتبعة في نموذج تدريس البرهان، بواقع درجة لكل إجراء من الإجراءات الآتية:

١- تحديد المعطيات والنتائج.

٢- استخدام التعريفات اللازمة لكتابة البرهان بشكل صحيح.

٣- تحديد الطريقة المناسبة للبرهان واستخدامها بالشكل السليم.

٤- كتابة البرهان باستخدام طرق التحليل والاستنتاج الرياضية لربط خطوات البرهان معا.

تجريب اختبار كتابة البرهان الرياضي استطلاعياً : ويهدف هذا التطبيق الاستطلاعي إلى حساب ثبات الاختبار ومدى وضوح البنود، والوقت اللازم لأداء الاختبار، تم تطبيق الاختبار على عينة استطلاعية مكونة من (٢٢) طالباً وطالبةً في أحد مقررات الجبر في جامعة الكويت، وتبيَّن من خلال التطبيق أن بنود الاختبار كانت واضحة للطلبة، وأن الزمن المناسب لتطبيق الاختبار حوالى (٦٠) دقيقة.

وتمّ حساب ثبات الاختبار بطريقة إعادة الاختبار (Test retest)، فقد تمّ حساب نتائج التطبيق الأولي على العينة الاستطلاعية، وبعد ثلاثة أسابيع تمّ إعادة تطبيق الاختبار على نفس المجموعة، وتمّ حساب معامل الارتباط بيرسون) Pearson correlation coefficient) بين نتائج التطبيقين فبلغ (٠,٨٣)، وهذا مستوى ثبات مقبول يمكن معه تطبيق الاختبار.

ثانياً : استبانة المعتقدات نحو البرهان الرياضي

راجعت الباحثتان الدراسات السابقة في مجال المعتقدات نحو البرهان الرياضي للوقوف على المحاور اللازمة للإجابة عن أسئلة الدراسة، ولقد تم الأخذ بالمحاور الثلاثة التي استخدمها ستايلينو وزملاؤه (Stylianou et al., 2015) ثم صممت أداة الدراسة في صورتها الأولية من ثلاثة محاور:

الأول: المعتقدات نحو دور البرهان الرياضي وتضمن اثنتي عشرة عبارة.

الثاني: المعتقدات نحو قدرة الطالب على دراسة البرهان الرياضي وتضمن سبع عبارات.

الثالث: المعتقدات نحو دور الطالب في محاضرات البرهان الرياضي وتضمن خمس عبارات.

وصممت الباحثتان الأداة وفق نموذج ليكرت خماسي التدريج، وكانت على النحو الآتي: أوافق بشدة = ٥ درجات، أوافق = ٤ ، لا أدري = ٣ ، أرفض = ٢ ، وأرفض بشدة= ١، وللمفردات السلبية والبالغ عددها ست عبارات تم عكس سلم الدرجات.

التحقق من صدق و ثبات الاستبانة

صدق المحكمين : تم عرض الاستبانة على ثلاثة محكمين متخصصين في التربية ووضحت الباحثتان الهدف من الاستبانة، وأفراد العينة، وطُلب من المحكمين إبداء آرائهم حول مدى: مناسبة البنود لقياس ما وضعت لقياسه ولأفراد عينة الدراسة، وأخذت الباحثتان بتوجيهات المحكمين فتم تعديل بعض الصياغات لتحتوي الاستبانة في صورتها النهائية على (٢٤) عبارة في ثلاثة محاور: (١٢) عبارة ركزت على المعتقدات نحو دور البرهان الرياضي، وسبع عبارات ركزت على المعتقدات نحو قدرة الطالب على كتابة البرهان الرياضي، وخمس عبارات تحت محور اعتقادات نحو دور الطالب في محاضرات البرهان الرياضي .

الاتساق الداخلي: خلال التطبيق الاستطلاعي على العينة الاستطلاعية المكونة من (٢٢) طالباً وطالبةً، تم حساب الاتساق الداخلي ومعامل الثبات للاستبانة، فلقد تم حساب الاتساق بين البنود والمحور الذي تنتمي إليه، وتبين أن بنود الاستبانة كان لها اتساق مع المحور الذي تنتمي إليه عند مستوى دلالة (٠,٠١)، وتراوح معامل ارتباط بنود محور دور البرهان في الرياضيات بين (٠,٥٠ و٠,٨٥) وتراوح معامل الارتباط لبنود محور قدرة الطالب على دراسة البرهان الرياضي بين (٠,٥٣ و٠,٨٦) وتراوح معامل الارتباط لبنود محور دور الطالب في محاضرة البرهان الرياضي بين (٠,٤٩ و٠,٨٢) وأيضا تم حساب الاتساق بين درجات كل محور من محاور الاستبانة والدرجة الكلية للاستبانة، وتبين أن درجات محاور الاستبانة كان لها اتساق مع الدرجة الكلية للاستبانة عند مستوى دلالة (٠,٠١)، وتراوح معامل الارتباط للمحاور مع الاستبانة بين (٠,٨١ و٠,٩٣).

معامل الثبات: تم استخدام معامل ألفا كرونباخ (Cronbach's alpha) لمعاملات الثبات لمحاور الاستبانة التي تم تطبيقها على العينة الاستطلاعية، وجدول (٢) يوضح نتائج ألفا كرونباخ لكل محور من محاور الاستبانة والاستبانة ككل، وتدل نتائج معامل ألفا كرونباخ على تمتع الأداة بدرجة ثبات عالية يمكن معها تطبيق الأداة.

جدول (٢)
معامل ألفا كرونباخ لثبات أداة الدراسة

المحاور	عدد العبارات	معامل ألفا كرونباخ
المعتقدات نحو دور البرهان الرياضي	١٢	٠,٧٢
المعتقدات نحو قدرة الطالب على دراسة البرهان الرياضي	٧	٠,٧٩
المعتقدات نحو دور الطالب في محاضرات البرهان الرياضي	٥	٠,٧٥
الاستبانة ككل	٢٤	٠,٨٥

التطبيق القبلي لأدوات الدراسة على المجموعتين

وهدف التطبيق القبلي لأدوات الدراسة على المجموعتين الضابطة والتجريبية للتأكد من تجانس المجموعتين في اختبار البرهان الرياضي واستبانة المعتقدات، وتم استخدام اختبار (ت) للعينات المستقلة Independent t-test على نتائج اختبار البرهان الرياضي واستبانة المعتقدات للمجموعتين، وتبين من خلال نتائج اختبار (ت) كما يوضحها جدول (٣) أنه لا يوجد فرق دال إحصائياً بين أداء المجموعتين في اختبار كتابة البرهان وإجراءاته، وكذلك تبين من خلال نتائج اختبار (ت) كما يوضحها جدول (٤) أنه لا يوجد فرق دال إحصائياً بين أداء المجموعتين في استبانة المعتقدات ومحاورها الثلاثة.

جدول (٣)
نتائج اختبار (ت) القبلي للفرق بين متوسط المجموعتين الضابطة والتجريبية في اختبار كتابة البرهان وإجراءاته

الاختبار وإجراءاته	المجموعة	عدد أفراد العينة	المتوسط الحسابي	الانحراف المعياري	درجات الحرية	قيمة ت	القيمة الاحتمالية	الدلالة الإحصائية
المعطيات والنتائج	الضابطة	٢٨	١,٨٩	٣,٠٦	٥١	٠,٩٥	٠,٣٥	غير دال
	التجريبية	٢٥	١,٤٤	٢,٣٧				
التعريفات	الضابطة	٢٨	٠,٦٤	١,٧٣	٥١	٠,٩٠	٠,٣٧	غير دال
	التجريبية	٢٥	٠,٣٦	١,٧٣				
طريقة البرهان	الضابطة	٢٨	٠,١١	١,٣٩	٥١	٠,٧٣	٠,٤٧	غير دال
	التجريبية	٢٥	٠,٠٤	٠,٧٦				
ترابط العبارات وتبريراتها	الضابطة	٢٨	٠,٠٤	٠,٤٢	٥١	٠,٩٤	٠,٣٥	غير دال
	التجريبية	٢٥	٠,٠٠	٠,٢٠				
الاختبار ككل	الضابطة	٢٨	٢,٧٥	٣,٠٦	٥١	١,١٩	٠,٢٤	غير دال
	التجريبية	٢٥	١,٨٤	٢,٣٨				

جدول (٤)
نتائج اختبار (ت) القبلي للفرق بين متوسط المجموعتين الضابطة والتجريبية في استبانة المعتقدات نحو البرهان الرياضي ومحاورها

المعتقدات ومحاورها	المجموعة	عدد أفراد العينة	المتوسط الحسابي	الانحراف المعياري	درجات الحرية	قيمة ت	القيمة الاحتمالية	الدلالة الإحصائية
دور البرهان الرياضي	الضابطة	٢٨	٤٤,١٤	٦,٠٠	٥١	-٠,٢٦	٠,٧٩	غير دال
	التجريبية	٢٥	٤٤,٦٤	٧,٦٩				
قدرة الطالب على دراسة البرهان	الضابطة	٢٨	٢١,١٤	١,٧٨	٥١	١,٢١	٠,٢٣	غير دال
	التجريبية	٢٥	٢٠,٣٢	٣,٠٨				

تابع جدول (٤)

المعتقدات ومحاورها	المجموعة	عدد أفراد العينة	المتوسط الحسابي	الانحراف المعياري	درجات الحرية	قيمة ت	القيمة الاحتمالية	الدلالة الإحصائية
دور الطالب في محاضرات البرهان	الضابطة	٢٨	١٥,٩٣	١,٨٠	٥١	٠,٣٠	٠,٧٦	غير دال
	التجريبية	٢٥	١٥,٧٢	٣,٠٨				
الاستبانة ككل	الضابطة	٢٨	٨١,٢١	٦,٠٥	٥١	٠,٢٣	٠,٨٢	غير دال
	التجريبية	٢٥	٨٠,٦٨	١٠,٨٤				

المعالجات الإحصائية

تمّ استخدام التحليل الكمي للإجابة عن أسئلة الدراسة، وقد استخدمت الباحثتان حزمة التحليل الإحصائي(SPSS) في حساب النسب، ومقاييس النزعة المركزية، ومقاييس التشتت واختبار (ت) للعينات المستقلة Independent t-test، ومعامل ألفا كرونباخ (Cronbach's alpha)، ومعامل الارتباط بيرسون (Pearson correlation coefficient)، ومربع إيتا ( ) للتحقق من حجم الأثر.

عرض نتائج الدراسة ومناقشتها

أولاً: نتائج السؤال الأول

للإجابة عن السؤال الأول والذي نص على: «ما أثر برنامج مقترح لتدريس البرهان قائم على المناقشة وتحليل أمثلة لبراهين في تطوير مهارة طلبة الجامعة في كتابة البرهان؟

فيما نصت الفرضية على "لا يوجد فرق دال إحصائيا عند مستوى (a = ٠,٠٥) بين متوسطي درجات الطلبة في اختبار كتابة البرهان في المجموعتين التجريبية والضابطة في التطبيق البعدي تعزى للبرنامج المقترح لتدريس البرهان"، فلقد تم استخدام اختبار (ت) للعينات المستقلة Independent t-test على نتائج اختبار البرهان الرياضي البعدي للمجموعتين، واستخراج حجم الأثر مربع إيتا (n^2)، كما يوضحها جدول (٥).

جدول (٥)
نتائج اختبار (ت) البعدي للفرق بين المجموعتين التجريبية والضابطة في اختبار كتابة البرهان وإجراءاته وحجم الأثر

الاختبار وإجراءاته	المجموعة	عدد أفراد العينة	المتوسط الحسابي	الانحراف المعياري	درجات الحرية	قيمة ت	القيمة الاحتمالية		حجم الأثر
المعطيات والنتائج	التجريبية	٢٥	٥,٦٤	.٨١٠	٥١	٢,٧٣	٠,٠٩	٠,١٣	متوسط
	الضابطة	٢٨	٤,٩٣	١,٠٥					
التعريفات	التجريبية	٢٥	٥,٠٤	١,٧٢	٥١	٤,٦٠	٠,٠٠	٠,٢٩	كبير
	الضابطة	٢٨	٢,٥٤	٢,١٩					
طريقة البرهان	التجريبية	٢٥	٤,٠٠	٢,١٨	٥١	٦,٨١	٠,٠٠	٠,٤٧	كبير
	الضابطة	٢٨	.٦٨٠	١,٣١					
ترابط العبارات وتبريراتها	التجريبية	٢٥	٣,٨٤	٢,١٩	٥١	٨,١٨	٠,٠٠	٠,٥٦	كبير
	الضابطة	٢٨	٠,٢٩	.٦٦٠					
الاختبار ككل	التجريبية	٢٥	١٨,٥٢	٦,٢٥	٥١	٦,٨٩	٠,٠٠	٠,٤٨	كبير
	الضابطة	٢٨	٨,٤٣	٤,٣٤					

ويتبين من الجدول وجود فرق دال إحصائياً عند مستوى الدلالة (a = ٠,٠٥) بين متوسط أداء الطلبة في المجموعتين الضابطة والتجريبية في الاختبار ككل وجميع إجراءاته لصالح المجموعة التجريبية، وبالنظر إلى قيمة مربع إيتا والتي بلغت (٠,٤٨) للاختبار ككل نستدل على أن حجم الأثر للبرنامج التدريسي المقترح على مهارة طلبة الجامعة في كتابة البرهان يقع ضمن حجم الأثر المرتفع (Cohen, 1988)، إذ إن القيمة المحسوبة أكبر من (٠,١٤)، أي أن (٤٨٪) من التحسن الذي طرأ على مهارة كتابة البرهان للطلبة في المجموعة التجريبية في الاختبار البعدي يعزى للبرنامج التدريسي المقترح، وكذلك فإن قيمة مربع إيتا في إجراءات الاختبار توضح أن حجم الأثر كان مرتفعًا في: التعريفات الرياضية وتحديد طريقة البرهان وترابط العبارات وتبريراتها، إذ يعزى (٢٩٪) و(٤٧٪) و(٥٦٪) من التحسن في استخدام التعريفات الرياضية وتحديد طريقة البرهان وترابط العبارات وتبريراتها للمجموعة التجريبية للبرنامج المقترح ، بينما كان حجم الأثر في الإجراء الأول وهو تحديد المعطيات والمطلوب برهانه متوسطاً وبلغ (١٣٪).

ونتيجة لذلك تمَ رفض الفرض الصفري وقبول الفرض البديل وهو «وجود فرق دال إحصائياً بين متوسط أداء الطلبة في اختبار كتابة البرهان الرياضي في المجموعتين التجريبية والضابطة عند مستوى دلالة (a = ٠,٠٥) يعزى لأثر البرنامج المقترح لتدريس البرهان الرياضي".

وهذا يدل على فاعلية البرنامج في تحسين مهارة كتابة لبرهان الرياضي لدى الطلبة، ومن الممكن أن تفسر فاعلية البرنامج من خلال ما ذكره شونفلد (Schoenfeld, 2014) من أن مشاركة الطلبة وتفاعلهم في دروس الرياضيات مهمة لبناء المفهومات الرياضية، وتدخل من ضمن خصائص التدريس الفعال للرياضيات، وتؤكد ما اقترحه الباحثون في الرياضيات من أن المناقشة من الممكن أن تطور مستوى الطلبة في البرهان الرياضي (Syamsuri et al., 2018)، إذ إن استخدام أسلوب المناقشة في التدريس يعطى للطلبة مساحة ليكون لهم دور في التعلم وينقلهم من وضع المستمع إلى وضع المتفاعل في المحاضرات، بعكس أسلوب المحاضرة والأسئلة القصيرة التي تحد من تفكير الطلبة في كيفية تسلسل عبارات البرهان ومبرراتها كما أوضح فوكاوا-كونللي (Fukawa-Connelly, 2012)، ولقد أكد الطلبة أنهم عندما يكونون في وضع المستمع والأساتذة هم من يقوم بحل البراهين كما هو الحال في غالبية المحاضرات فإنهم يجدون صعوبة في فهم كيفية كتابة البرهان الرياضي مما يؤدي بهم للاعتماد على حفظ البراهين (Doruk & Kaplan, 2015).

إن إثارة الأسئلة المفتوحة ومناقشتها خلال المحاضرات يتيح للطلبة الفرصة للوقوف على مبررات اختيار الطرق الأنسب للبرهان، ويتضح ذلك من خلال نتائج الدراسة حيث تحسن الطلبة في المجموعة التجريبية في اختيار طريقة البرهان بنسبة (٤٧٪)، وكذلك فإن مناقشة وتفسير وتبرير الأسباب الداعية لكل خطورة في كتابة البرهان، وكيفية الربط بين عباراته سواء في المجموعات أو المحاضرة كمجموعة واحدة كان له دور في تحسن الطلبة في كتابة عبارات البرهان بشكل مترابط وكتابة التبريرات للعبارات بنسبة (٥٦٪)، وأيضا فإن مناقشة واجبات وأمثلة لبراهين تحتوي على أخطاء شائعة لدى الطلبة عند كتابة البرهان من الممكن أن يحسن من مهارة الطلبة في كتابة البرهان الرياضي (Kasman, 2006; Zerr & Zerr, 2011)، إذ تساعد مثل هذه الواجبات الطلبة على الوقوف على الأخطاء والأسباب التي تجعلها غير صحيحة والعمل على كتابتها بشكل سليم، وهذا العمل من تحليل وتفسير وإعادة كتابة البرهان يساعد الطلبة على فهم كيفية كتابة البرهان الرياضي وكيفية ترابط وتسلسل عباراته.

ثانياً: نتائج السؤال الثاني

للإجابة عن السؤال الثاني والذي نص على "ما أثر برنامج مقترح لتدريس البرهان قائم على المناقشة وتحليل أمثلة لبراهين في تنمية معتقدات طلبة الجامعة نحو البرهان؟"

فيما نصت الفرضية على أنه "لا يوجد فرق دال إحصائياً عند مستوى ($a = ٠,٠٥$) بين متوسطي درجات الطلبة في المجموعتين التجريبية والضابطة في التطبيق البعدي لاستبانة

معتقدات الطلبة نحو البرهان الرياضي تعزي للبرنامج المقترح لتدريس البرهان."، فلقد تم استخدام اختبار (ت) للعينات المستقلة Independent t-test على نتائج استجابة الطلبة على استبانة المعتقدات البعدي للمجموعتين، واستخراج حجم الأثر مربع إيتا ()، كما يوضحها جدول (٦).

جدول (٦)
نتائج اختبار (ت) البعدي للفرق بين المجموعتين التجريبية والضابطة في استبانة المعتقدات ومحاورها وحجم الأثر

المعتقدات ومحاورها	المجموعة	عدد أفراد العينة	المتوسط الحسابي	الانحراف المعياري	درجات الحرية	قيمة ت	القيمة الاحتمالية		حجم الأثر
دور البرهان الرياضي	التجريبية	٢٥	٤٧,٠٤	٧,٢٠٨	٥١	١,٧٢	٠,٠٠٩	٠,٠٦	متوسط
	الضابطة	٢٨	٤٣,٨٦	٦,٢٨					
قدرة الطالب على دراسة البرهان	التجريبية	٢٥	٢٦,٠٠	٤,٣٤	٥١	٣,٩٩	٠,٠٠	٠,٢٤	كبير
	الضابطة	٢٨	٢١,٦٤	٣,٥٩					
دور الطالب في محاضرات البرهان	التجريبية	٢٥	١٩,٤٤	٣,٣٩	٥١	٤,٩٩	٠,٠٠	٠,٣٣	كبير
	الضابطة	٢٨	١٥,٥٤	٢,٢٥					
الاستبانة ككل	التجريبية	٢٥	٩٢,٤٨	١٣,٠٠	٥١	٣,٧٨	٠,٠٠	٠,٢٢	كبير
	الضابطة	٢٨	٨١,٠٤	٨,٨٤					

ويتبين من الجدول وجود فرق دال إحصائياً عند مستوى الدلالة (٠,٠٥ = a) بين استجابة الطلبة في المجموعة التجريبية والضابطة على استبانة المعتقدات ككل وجميع محاورها لصالح المجموعة التجريبية، وبالنظر إلى قيمة مربع إيتا والتي بلغت (٠,٢٢) لاستبانة المعتقدات ككل، نستدل على أن حجم الأثر للبرنامج المقترح على معتقدات الطلبة نحو البرهان يقع ضمن حجم الأثر المرتفع إذ أن القيمة المحسوبة أكبر من (٠,١٤)أي أن (٢٢٪) من التحسن الذي طرأ على معتقدات الطلبة نحو البرهان في المجموعة التجريبية في التطبيق البعدي يعزى للبرنامج التدريسي المقترح، وكذلك فإن قيمة مربع إيتا لمحاور الاستبانة تبين أن حجم الأثر كان مرتفعاً للمحورين: قدرة الطالب على دراسة البرهان الرياضي ودور الطالب في محاضرات البرهان، حيث يعزى (٢٤٪) و(٣٣٪) من التحسن في معتقدات الطلبة في المجموعة التجريبية نحو قدرة الطالب على دراسة البرهان الرياضي ودور الطالب في محاضرات البرهان للبرنامج المقترح، بينما كان حجم الأثر للمحور الأول وهو دور البرهان الرياضي متوسطاً وبلغ (٦٪)، ونتيجة لذلك تمَ رفض الفرض الصفري، وقبول الفرض البديل وهو "وجود فرق دال إحصائياً بين متوسط استجابة الطلبة على استبانة المعتقدات نحو البرهان ومحاورها الثلاثة في المجموعتين

التجريبية والضابطة في التطبيق البعدي عند مستوى دلالة (٠,٠٥ = a) يعزى لأثر البرنامج المقترح لتدريس البرهان".

وهذا يدل على فاعلية البرنامج في تحسين معتقدات الطلبة نحو البرهان ومن الممكن تفسير هذه الفاعلية من خلال ما ذكره الباحثون بأن معتقدات الطلبة نحو المفهومات الرياضية تلخص الخبرة التي تلقوها والبيئة المصاحبة للتعلم (Stylianou et al., 2015)، ولقد كان لأسلوب المناقشة أثر في تحسين معتقدات الطلبة في المجموعة التجريبية نحو البرهان بشكل عام، وكان أكبر أثر "لدور الطالب في محاضرات البرهان الرياضي" بنسبة (٣٣٪)، فقد أصبح للطلبة دور أكبر من خلال المناقشات والعمل من خلال المجموعات، وهذا يعارض حال الطلبة عند تدريس البرهان بالطريقة المعتادة، فقد ورد في الدراسات السابقة أن غالبية الطلبة يعتقدون أن دورهم في محاضرات البرهان الرياضي محدود (Stylianou et al., 2015)، وذلك لأن الدور الأساسي في دروس البرهان المعتادة في الجامعات يعتمد على المحاضر في عرض البرهان، ودور الطالب ينحصر في الاستماع وتلقي المعلومات (Ugurel & Boz-Yaman, 2017)، وكذلك كان للبرنامج أثر كبير في تحسين معتقدات الطلبة نحو " قدرتهم على دراسة البرهان الرياضي" بنسبة (٢٤٪)، ويمكن تفسير ذلك بأن استخدام أسلوب المناقشة وتحليل أمثلة تحوي أخطاء كان لها دور في تحسين ثقة الطلبة بقدرتهم على كتابة البرهان، وهذا يوافق ما ورد في دراسة كاسمان (Kasman, 2006).

تبيَّن من نتائج الدراسة فاعلية البرنامج في تحسين مستوى الطلبة في كتابة البرهان وكذلك معتقداتهم نحوه، وهذه النتائج توضح أهمية أسلوب المناقشة في تدريس البرهان، فهي تعطي الطلبة مساحة للمشاركة والتفاعل والتعبير وتوضيح الأفكار والتفسيرات ويمنحهم دوراً فعالاً في التعلم.

التوصيات

في ضوء ما أسفرت عنه نتائج البحث توصي الباحثتان بالتأكيد على الجوانب الآتية عند تدريس البرهان:

١. تخصيص محاضرات لمناقشة أنواع البرهان وكيفية كتابته.
٢. استخدام استراتيجية المناقشة عند تدريس البرهان.
٣. التأكيد على تحديد المعطيات و المطلوب برهانه.
٤. مناقشة معاني واستدلالات المنطق الرياضي .

٥. التأكيد على معنى التعريفات الرياضية للمصطلحات الواردة في البرهان وكيفية توظيفها في البرهان.
٦. مناقشة مميزات وعيوب الطرق المختلفة وكيفية اختيار أنسبها.
٧. التأكيد على عرض ومناقشة الأخطاء الدارجة لدى الطلبة عند كتابة البرهان.
٨. توفير الفرص للطلبة للعمل في مجموعات لكتابة البرهان الرياضي.
٩. التأكيد على الواجبات لقراءة البراهين وتحليلها للتعرف على أساسياتها وكيف تم كتابتها بشكل سليم.

الدراسات المستقبلية

١. بحث أثر استخدام برنامج تدريسي قائم على المناقشة والأخطاء الشائعة لدى الطلبة عند كتابة البرهان في تنمية مهارات الطلبة ومعتقداتهم نحو البرهان في المراحل ما قبل الجامعية.
٢. دراسة استراتيجيات الطلبة في قراءة البرهان الرياضي.
٣. إجراء دراسات على معتقدات معلمي الرياضيات نحو البرهان الرياضي واستراتيجياتهم في تدريسه.
٤. إجراء دراسات على استراتيجيات أساتذة الجامعة في تدريس البرهان.

المراجع

خاجه، محمد (٢٠١٩). استراتيجية قائمة على التعليم النشط لتنمية مهارات البرهان الرياضي لدى تلاميذ المرحلة المتوسطة بدولة الكويت. مجلة البحث العلمي في التربية، ٢٠(١١)، ٢٩٧-٣١٦.

أبو عقيل، إبراهيم (٢٠١٥). معوقات تدريس البراهين الرياضية في المرحلة الأساسية العليا من وجهة نظر معلمي الرياضيات. المجلة التربوية، الكويت، ٢٩(١١٥)، ٢٠٩- ٢٤٢.

حجازي، إبراهيم (٢٠٢٠). برنامج قائم على الأنشطة الإثرائية في الأنماط الرياضية لتنمية مهارات البرهان الرياضي لدى تلاميذ المرحلة الإعدادية. مجلة كلية التربية بالمنصورة، جامعة المنصورة، ١١٠(٢)، ٧٣٢ – ٧٥٥.

كشك، ريهام، رمضان صالح، زهدي مبارك(٢٠٢٠) . فعالية بعض استراتيجيات التعلم النشط في تنمية مهارات البرهان الرياضي لدى تلاميذ المرحلة الإعدادية مختلفي الأسلوب المعرفي. مجلة كلية التربية- جامعة المنصورة، ١١٠(٥)، ١٣٢٤ - ١٣٦٣.

Alcock, L., Hodds, M., Roy, S., & Inglis, M. (2015). Investigating and improving undergraduate proof comprehension. *Notices of the American Mathematical Society, 62*(7), 742-752. https://doi.org/http://www.ams.org/notices/201507/index.html

Bickerton, R. T., & Sangwin, C. J. (2021). Practical online assessment of mathematical proof. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. https://doi.org/https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1896813

Çetin, A. Y., & Dikici, R. (2021). Organizing the mathematical proof process with the help of basic components in teaching proof: Abstract algebra example. *LUMAT: International Journal on Math, Science and Technology Education, 9*(1), 235–255. https://doi.org/ https://doi.org/10.31129/LUMAT.9.1.1497

Cohen, J. (1988). *Statistical power analysis for the behavioral sciences* (2nd ed.). Lawrence Erlbaum.

Doruk, M., & Kaplan, A. (2015). Prospective mathematics teachers' difficulties in doing proofs and causes of their struggle with proofs. *Bayburt Eğitim Fakültesi Dergisi, 10*(2), 315-328. https://doi.org/https://dergipark.org.tr/en/pub/befdergi/issue/17275/180470

Fukawa-Connelly, T. P. (2012). A case study of one instructor's lecture-based teaching of proof in abstract algebra: making sense of her pedagogical moves. *Educational studies in Mathematics, 81*(3), 325-345. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s10649-012-9407-9

Güler, G., & Dikici, R. (2014). Examining prospective mathematics teachers' proof processes for algebraic concepts. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 45*(4), 475-497. https://doi.org/https://doi.org/10.1080/0020739X.2013.837528

Hanna, G., & Knipping, C. (2020). Proof in Mathematics Education, 1980-2020: An Overview. *Journal of Educational Research in Mathematics, 30*(SP1), 1-13. https://doi.org/https://doi.org/10.29275/jerm.2020.08.sp.1.1

Hemmi, K. (2008). Students' encounter with proof: the condition of transparency. *ZDM, 40*(3), 413-426. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s11858-008-0089-9

Kasman, R. (2006). Critique that! Analytical writing assignments in advanced mathematics courses. *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies, 16*(1), 1-15. https://doi.org/https://doi.org/10.1080/10511970608984131.

Knuth, E. J., Choppin, H. M., & Bieda, K. N. (2010). *Middle school students' production of mathematical justifications*. In D. A. Stylianou, M. L. Blanton, & E. J. Knuth (Eds.). Teaching and learning proof across the grades (pp. 153-170). Routledge: New York.

Kögce, D., & Yıldız, C. (2011). A comparision of freshman and senior mathematics student teachers' views of proof concept. *Procedia-Social and Behavioral Sciences, 15,* 1266-1270. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2011.03.274

Maslahah, F., & Abadi, A. (2019). Undergraduate students' difficulties in proving mathematics. *Journal of Physics: Conference Series, 1320*(1), 012072. https://doi.org/https://doi.org/10.1088/1742-6596/1320/1/012072

Mejia-Ramos, J. P., Fuller, E., Weber, K., Rhoads, K., & Samkoff, A. (2012). An assessment model for proof comprehension in undergraduate mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 79*(1), 3-18. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s10649-011-9349-7

NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

Schoenfeld, A. H. (2014). What makes for powerful classrooms, and how can we support teachers in creating them? A story of research and practice, productively intertwined. *Educational Researcher, 43*(8), 404-412. https://doi.org/https://doi.org/10.3102/0013189X14554450

Schoenfeld, A. H. (2016). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics *Journal of Education, 196*(2), 1-38. https://doi.org/https://doi.org/10.1177/002205741619600202

Selden, A., Selden, J., & Benkhalti, A. (2018). Proof frameworks: A way to get started. *PRIMUS, 28*(1), 31-45. https://doi.org/https://doi.org/10.1080/10511970.2017.1355858

Sen, C., & Guler, G. (2015). Examination of Secondary School Seventh Graders' Proof Skills and Proof Schemes. *Universal Journal of Educational Research, 3*(9), 617-631. https://doi.org/10.13189/ujer.2015.030906

Stavrou, S. G. (2014). Common errors and misconceptions in mathematical proving by education undergraduates. *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers, 1*.

Stewart, S., & Thomas, M. O. (2019). Student perspectives on proof in linear algebra. *ZDM, 51*(7), 1069-1082. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s11858-019-01087-z

Stylianou, D. A., Blanton, M. L., & Rotou, O. (2015). Undergraduate students' understanding of proof: Relationships between proof conceptions, beliefs, and classroom experiences with learning proof. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 1*(1), 91-134. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s40753-015-0003-0

Syamsuri, S., Marethi, I., & Mutaqin, A. (2018). Understanding on strategies of teaching mathematical proof for undergraduate students. *Jurnal Cakrawala Pendidikan, 37*(2). https://doi.org/https://doi.org/10.21831/cp.v37i2.19091

Ugurel, I., & Boz-Yaman, B. (2017). Semantic structure of classroom discourse concerning proof and proving in high school mathematics. *International Journal of Research in Education and Science, 3*(2), 343-372. https://doi.org/10.21890/ijres.327893

Viholainen, A., Tossavainen, T., Viitala, H., & Johansson, M. (2019). University mathematics students' self-efficacy beliefs about proof and proving. *LUMAT: International Journal on Math, Science and Technology Education, 7*(1), 148–164-148–164. https://doi.org/https://doi.org/10.31129/LUMAT.7.1.406

Waluyo, M., & Vidákovich, T. (2021). Assessment of students' mathematical proof comprehension: Gender and Year Level Background. *Journal of Physics: Conference Series, 1776*(1), 012017. https://doi.org/https://doi.org/10.1088/1742-6596/1776/1/012017

Weber, K., & Mejia-Ramos, J. P. (2014). Mathematics majors' beliefs about proof reading. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 45*(1), 89-103. https://doi.org/https://doi.org/10.1080/0020739X.2013.790514

Yang, K.-L., & Lin, F.-L. (2008). A model of reading comprehension of geometry proof. *Educational Studies in Mathematics, 67*(1), 59-76. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s10649-007-9080-6

Zerr, J. M., & Zerr, R. J. (2011). Learning from their mistakes: Using students' incorrect proofs as a pedagogical tool. *PRIMUS, 21*(6), 530-544. https://doi.org/https://doi.org/10.1080/10511970903386915